

নবম-দশম শ্রেণির গণিতঃ অনুশীলনী-৩.৪ উৎপাদকে বিশ্লেষণ (ভাগশেষ উপপাদ্য)

১. $3a^3 + 2a + 5$

সমাধানঃ

মনে করি, $f(a) = 3a^3 + 2a + 5$

$$f(-1) = 3(-1)^3 + 2(-1) + 5$$

$$= 3 \cdot (-1) - 2 + 5$$

$$= -3 - 2 + 5$$

$$= 0$$

অতএব, $f(-1)=0$ হওয়ায় $(a+1)$ হলো $f(a)$ -এর একটি উৎপাদক।

$$3a^3 + 2a + 5$$

$$= 3a^3 + 3a^2 - 3a^2 - 3a + 5a + 5$$

$$= 3a^2(a + 1) - 3a(a + 1) + 5(a + 1)$$

$$= (a + 1)(3a^2 - 3a + 5) \quad [\text{কমন}]$$

২. $x^3 - 7xy^2 - 6y^3$

সমাধানঃ

মনে করি, $f(x) = x^3 - 7xy^2 - 6y^3$

$$f(-y) = (-y)^3 - 7(-y)y^2 - 6y^3$$

$$= -y^3 + 7y^3 - 6y^3$$

$$= 0$$

অতএব, $f(-y)=0$ হওয়ায় $(x+y)$ হলো $f(x)$ -এর একটি উৎপাদক।

$$x^3 - 7xy^2 - 6y^3$$

$$= x^3 - x^2y - x^2y - xy^2 - 6xy^2 - 6y^3$$

$$= x^2(x + y) - xy(x + y) - 6y^2(x + y)$$

$$= (x + y)(x^2 - xy - 6y^2) \quad [\text{কমন}]$$

$$= (x + y)(x^2 - 3xy + 2xy - 6y^2) \quad [\text{মিডল টার্ম ব্রেক}]$$

$$= (x + y)\{x(x - 3y) + 2y(x - 3y)\} \quad [\text{কমন}]$$

$$= (x + y)(x - 3y)(x + 2y) \quad [\text{কমন}]$$

$$= (x + y)(x + 2y)(x - 3y)$$

৩. $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

সমাধানঃ

মনে করি, $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

$$f(-1) = (-1)^3 + 2(-1)^2 - 5(-1) - 6$$

$$= -1 + 2 + 5 - 6$$

$$= -1 + 2 + 5 - 6$$

$$= 0$$

অতএব, $(x+1)$ হলো $f(x)$ -এর একটি উৎপাদক।

$$\begin{aligned} & x^3 + 2x^2 - 5x - 6 \\ &= x^3 + 3x^2 - x^2 - 3x - 2x - 6 \\ &= x^2(x + 3) - x(x + 3) - 2(x + 3) \\ &= (x + 3)(x^2 - x - 2) \quad [\text{কমন}] \\ &= (x + 3)(x^2 - 2x + x - 2) \quad [\text{মিডল টার্ম ব্রেক}] \\ &= (x + 3)\{x(x - 2) + 1(x - 2)\} \quad [\text{কমন}] \\ &= (x + 3)(x - 2)(x + 1) \quad [\text{কমন}] \end{aligned}$$

$$8. x^3 + 4x^2 + x - 6$$

সমাধানঃ

$$\begin{aligned} & \text{মনে করি, } f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6 \\ & f(1) = 1^3 + 4 \cdot 1^2 + 1 - 6 \\ &= 1 + 4 + 1 - 6 \\ &= 0 \\ & \text{অতএব, } (x-1) \text{ হলো } f(x)\text{-এর একটি উৎপাদক।} \\ & x^3 + 4x^2 + x - 6 \\ &= x^3 + 3x^2 + x^2 + 3x - 2x - 6 \\ &= x^2(x + 3) + x(x + 3) - 2(x + 3) \\ &= (x + 3)(x^2 + x - 2) \quad [\text{কমন}] \\ &= (x + 3)(x^2 + 2x - x - 2) \quad [\text{মিডল টার্ম ব্রেক}] \\ &= (x + 3)\{x(x + 2) - 1(x + 2)\} \quad [\text{কমন}] \\ &= (x + 3)(x + 2)(x - 1) \quad [\text{কমন}] \end{aligned}$$

$$9. a^3 + 3a + 36$$

সমাধানঃ

$$\begin{aligned} & \text{মনে করি, } f(a) = a^3 + 3a + 36 \\ & f(-3) = (-3)^3 + 3(-3) + 36 \\ &= -27 - 9 + 36 \\ &= 0 \\ & \text{অতএব, } (a+3) \text{ হলো } f(a)\text{-এর একটি উৎপাদক।} \\ & a^3 + 3a + 36 \\ &= a^3 + 3a^2 - 3a^2 - 9a + 12a + 36 \\ &= a^2(a + 3) - 3a(a + 3) + 12(a + 3) \\ &= (a + 3)(a^2 - 3a + 12) \quad [\text{কমন}] \end{aligned}$$

$$10. a^4 - 4a + 3$$

সমাধানঃ

মনে করি, $f(a) = a^4 - 4a + 3$

$$f(1) = 1^4 - 4 \cdot 1 + 3$$

$$= 1 - 4 + 3$$

$$= 4 - 4$$

$$= 0$$

অতএব, $(a-1)$ হলো $f(a)$ -এর একটি উৎপাদক।

$$a^4 - 4a + 3$$

$$= a^4 - a^3 + a^3 - a^2 + a^2 - a - 3a + 3$$

$$= a^3(a - 1) + a^2(a - 1) + a(a - 1) - 3(a - 1)$$

$$= (a - 1)(a^3 + a^2 + a - 3) \quad [\text{কমন}]$$

অবশিষ্ট রাশি $a^3 + a^2 + a - 3$

এখন,

$$f(a) = a^3 + a^2 + a - 3$$

$$f(1) = 1^3 + 1^2 + 1 - 3$$

$$= 1 + 1 + 1 - 3$$

$$= 3 - 3$$

$$= 0$$

অতএব, $(a-1)$ হলো $f(a)$ -এর একটি উৎপাদক।

তাহলে,

$$a^3 + a^2 + a - 3$$

$$= a^3 - a^2 + 2a^2 - 2a + 3a - 3$$

$$= a^2(a - 1) + 2a(a - 1) + 3(a - 1)$$

$$= (a - 1)(a^2 + 2a + 3) \quad [\text{কমন}]$$

সুতরাং

$$a^4 - 4a + 3$$

$$= (a - 1)(a^3 + a^2 + a - 3)$$

$$= (a - 1)(a - 1)(a^2 + 2a + 3) \quad [\text{মান বসিয়ে}]$$

$$৭. a^3 - a^2 - 10a - 8$$

সমাধানঃ

মনে করি, $f(a) = a^3 - a^2 - 10a - 8$

$$f(4) = 4^3 - 4^2 - 10(4) - 8$$

$$= 64 - 16 - 40 - 8$$

$$= 0$$

অতএব, $(a-4)$ হলো $f(a)$ -এর একটি উৎপাদক।

$$a^3 - a^2 - 10a - 8$$

$$= a^3 - 4a^2 + 3a^2 - 12a + 2a - 8$$

$$= a^2(a - 4) + 3a(a - 4) + 2(a - 4)$$

$$\begin{aligned}
&= (a-4)(a^2+3a+2) \quad [\text{কমন}] \\
&= (a-4)(a^2+2a+a+2) \quad [\text{মিডল টার্ম ব্রেক}] \\
&= (a-4)\{a(a+2)+1(a+2)\} \quad [\text{কমন}] \\
&= (a-4)(a+2)(a+1) \quad [\text{কমন}] \\
&= (a-4)(a+1)(a+2)
\end{aligned}$$

৮. $x^3 - 3x^2 + 4x - 4$

সমাধানঃ

$$\begin{aligned}
&\text{মনে করি, } f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 4 \\
&f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 4 \\
&= 8 - 12 + 8 - 4 \\
&= 0 \\
&\text{অতএব, } (x-2) \text{ হলো } f(x) \text{-এর একটি উৎপাদক।} \\
&x^3 - 3x^2 + 4x - 4 \\
&= x^3 - 2x^2 - x^2 + 2x + 2x - 4 \\
&= x^2(x-2) - x(x-2) + 2(x-2) \\
&= (x-2)(x^2 - x + 2) \quad [\text{কমন}]
\end{aligned}$$

৯. $a^3 - 7a^2b + 7ab^2 - b^3$

সমাধানঃ

$$\begin{aligned}
&\text{মনে করি, } f(a) = a^3 - 7a^2b + 7ab^2 - b^3 \\
&f(b) = b^3 - 7 \cdot b^2 \cdot b + 7 \cdot b \cdot b^2 - b^3 \\
&= b^3 - 7b^3 + 7b^3 - b^3 \\
&= 0 \\
&\text{অতএব, } (a-b) \text{ হলো } f(a) \text{-এর একটি উৎপাদক।} \\
&a^3 - 7a^2b + 7ab^2 - b^3 \\
&= a^3 - a^2b - 6a^2b + 6ab^2 + ab^2 - b^3 \\
&= a^2(a-b) - 6ab(a-b) + b^2(a-b) \\
&= (a-b)(a^2 - 6ab + b^2) \quad [\text{কমন}]
\end{aligned}$$

১০. $x^3 - x - 24$

সমাধানঃ

$$\begin{aligned}
&\text{মনে করি, } f(x) = x^3 - x - 24 \\
&f(3) = 3^3 - 3 - 24 \\
&= 27 - 3 - 24 \\
&= 0 \\
&\text{অতএব, } (x-3) \text{ হলো } f(x) \text{-এর একটি উৎপাদক।} \\
&x^3 - x - 24 \\
&= x^3 - 3x^2 + 3x^2 - 9x + 8x - 24
\end{aligned}$$

$$= x^2(x-3) + 3x(x-3) + 8(x-3)$$

$$= (x-3)(x^2 + 3x + 8) \quad [\text{কমন}]$$

১১. $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

সমাধানঃ

মনে করি, $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

$$f(-1) = (-1)^3 + 6.(-1)^2 + 11.(-1) + 6$$

$$= -1 + 6.1 - 11 + 6$$

$$= -1 + 6 - 11 + 6$$

$$= 0$$

অতএব, $(x+1)$ হলো $f(x)$ -এর একটি উৎপাদক।

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6$$

$$= x^3 + 2x^2 + 4x^2 + 8x + 3x + 6$$

$$= x^2(x+2) + 4x(x+2) + 3(x+2)$$

$$= (x+2)(x^2 + 4x + 3) \quad [\text{কমন}]$$

$$= (x+2)(x^2 + 3x + x + 3) \quad [\text{মিডল টার্ম ব্রেক}]$$

$$= (x+2)\{x(x+3) + 1(x+3)\} \quad [\text{কমন}]$$

$$= (x+2)(x+3)(x+1) \quad [\text{কমন}]$$

$$= (x+1)(x+2)(x+3)$$

১২. $2x^4 - 3x^3 - 3x - 2$

সমাধানঃ

মনে করি, $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 3x - 2$

$$f(2) = 2(2^4) - 3(2^3) - 3(2) - 2$$

$$= 2.16 - 3.8 - 6 - 2$$

$$= 32 - 24 - 6 - 2$$

$$= 0$$

অতএব, $(x-2)$ হলো $f(x)$ -এর একটি উৎপাদক।

$$2x^4 - 3x^3 - 3x - 2$$

$$= 2x^4 - 4x^3 + x^3 - 2x^2 + 2x^2 - 4x + x - 2$$

$$= x^3(2x-4) + x^2(x-2) + 2x(x-2) + (x-2)$$

$$= (x-2)(2x^3 + x^2 + 2x + 1) \quad [\text{কমন}]$$

$$= (x-2)\{x^2(2x+1) + 1(2x+1)\} \quad [\text{কমন}]$$

$$= (x-2)(2x+1)(x^2+1) \quad [\text{কমন}]$$

১৩. $4x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 3x - 2$

সমাধানঃ

মনে করি, $f(x) = 4x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 3x - 2$

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{2}\right) &= 4\left(\frac{1}{2}\right)^4 + 12\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 7\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{2}\right) - 2 \\
&= 4 \cdot \frac{1}{16} + 12 \cdot \frac{1}{8} + 7 \cdot \frac{1}{4} - \frac{3}{2} - 2 \\
&= \frac{1}{4} + \frac{3}{2} + \frac{7}{4} - \frac{3}{2} - 2 \\
&= \frac{1}{4} + \frac{7}{4} - 2 \\
&= \frac{1+7-4}{4} \\
&= \frac{0}{4} \\
&= 0
\end{aligned}$$

অতএব, $(2x-1)$ হলো $f(x)$ -এর একটি উৎপাদক।

$$\begin{aligned}
4x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 3x - 2 \\
&= 4x^4 + 12x^3 + 8x^2 - x^2 - 3x - 2 \\
&= 4x^2(x^2 + 3x + 2) - (x^2 + 3x + 2) \\
&= (4x^2 - 1)(x^2 + 3x + 2) \quad [\text{কমন}] \\
&= \{(2x)^2 - 1^2\}(x^2 + 2x + x + 2) \quad [\text{মিডল টার্ম ব্রেক}] \\
&= (2x + 1)(2x - 1)\{x(x + 2) + 1(x + 2)\} \quad [\text{সূত্র } a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)] \text{ এবং } [\text{কমন}] \\
&= (2x + 1)(2x - 1)(x + 2)(x + 1) \quad [\text{কমন}]
\end{aligned}$$

১৪. $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x$

সমাধানঃ

$$\begin{aligned}
\text{মনে করি, } f(x) &= x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x \\
f(1) &= 1^6 - 1^5 + 1^4 - 1^3 + 1^2 - 1 \\
&= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

অতএব, $(x-1)$ হলো $f(x)$ -এর একটি উৎপাদক।

$$\begin{aligned}
x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x \\
&= x^5(x - 1) + x^3(x - 1) + x(x - 1) \\
&= (x - 1)(x^5 + x^3 + x) \quad [\text{কমন}] \\
&= (x - 1) \cdot x(x^4 + x^2 + 1) \quad [\text{কমন}] \\
&= x(x - 1)(x^4 + x^2 + 1) \\
&= x(x - 1)(x^4 + 2x^2 + 1 - x^2) \\
&= x(x - 1)\{(x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 1 + 1^2 - x^2\} \\
&= x(x - 1)\{(x^2 + 1)^2 - x^2\} \quad [\text{সূত্র } (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2] \\
&= x(x - 1)(x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x) \quad [\text{সূত্র } a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)] \\
&= x(x - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)
\end{aligned}$$

১৫. $4x^3 - 5x^2 + 5x - 1$

সমাধানঃ

$$\text{মনে করি, } f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 5x - 1$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = 4\left(\frac{1}{4}\right)^3 - 5\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 5\left(\frac{1}{4}\right) - 1$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{64} - 5 \cdot \frac{1}{16} + \frac{5}{4} - 1$$

$$= \frac{1}{16} - \frac{5}{16} + \frac{5}{4} - 1$$

$$= \frac{1-5+20-16}{16}$$

$$= \frac{0}{16}$$

$$= 0$$

অতএব, $(4x-1)$ হলো $f(x)$ -এর একটি উৎপাদক।

$$4x^3 - 5x^2 + 5x - 1$$

$$= 4x^3 - x^2 - 4x^2 + x + 4x - 1$$

$$= x^2(4x - 1) - x(4x - 1) + 1(4x - 1)$$

$$= (4x - 1)(x^2 - x + 1) \quad [\text{কমন}]$$

১৬. $18x^3 + 15x^2 - x - 2$

সমাধানঃ

$$\text{মনে করি, } f(x) = 18x^3 + 15x^2 - x - 2$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 18\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 15\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) - 2$$

$$= 18 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) + 15 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 2$$

$$= -\frac{9}{4} + \frac{15}{4} + \frac{1}{2} - 2$$

$$= \frac{-9+15+2-8}{4}$$

$$= \frac{0}{4}$$

$$= 0$$

অতএব, $(2x+1)$ হলো $f(x)$ -এর একটি উৎপাদক।

$$18x^3 + 15x^2 - x - 2$$

$$= 18x^3 + 9x^2 + 6x^2 + 3x - 4x - 2$$

$$= 9x^2(2x + 1) + 3x(2x + 1) - 2(2x + 1)$$

$$= (2x + 1)(9x^2 + 3x - 2) \quad [\text{কমন}]$$

$$= (2x + 1)(9x^2 + 6x - 3x - 2) \quad [\text{মিডল টার্ম ব্রেক}]$$

$$= (2x + 1)\{3x(3x + 2) - 1(3x + 2)\} \quad [\text{কমন}]$$

$$= (2x + 1)(3x + 2)(3x - 1) \quad [\text{কমন}]$$